MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Zweite Runde 2021

Zoom

19. Dezember 2020

Zeit: 3 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben eines Themenbereichs sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Geometrie

G1) Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Umkreismittelpunkt O. Die Gerade AC schneidet den Umkreis des Dreiecks ABO ein zweites Mal in S. Beweise, dass die Geraden OS und BC senkrecht aufeinander stehen.

G2) Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $BC > AC$. Die Mittelsenkrechte der Seite AB schneidet die Gerade BC in X und die Gerade AC in Y. Sei P die Projektion von X auf AC und sei Q die Projektion von Y auf BC. Beweise, dass die Gerade PQ die Strecke AB in ihrem Mittelpunkt schneidet.

Bemerkung: P ist die Projektion von X auf AC bedeutet, dass P auf der Geraden AC liegt und PX senkrecht zu AC steht.

Kombinatorik

K1) Julia hat $2n$ Steine, welche mit $1, 2, 3, \ldots, 2n$ beschriftet sind, sowie eine rote und eine blaue Schachtel. Sie will nun alle $2n$ Steine in die beiden Schachteln verteilen, sodass die Steine k und $2k$ für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$ in unterschiedlichen Schachteln landen. Wie viele Möglichkeiten hat Julia, um dies zu tun?

Bemerkung: Das Berechnen der Anzahl Möglichkeiten für irgendeine bestimmte ganze Zahl $n \geq 3$ gibt Teilpunkte.

K2) Seien $n \geq 4$ und $k, d \geq 2$ natürliche Zahlen mit $k \cdot d \leq n$. Die n Teilnehmenden der Mathematik-Olympiade sitzen um einen runden Tisch und warten auf Patrick. Als Patrick auftaucht, gefällt ihm die Situation gar nicht, da die Regeln des Social Distancing nicht eingehalten werden. Er wählt also k von den n Teilnehmenden aus, die bleiben dürfen, und schickt alle anderen aus dem Raum, sodass zwischen je zwei der verbleibenden k Teilnehmenden mindestens $d - 1$ freie Plätze sind. Wie viele Möglichkeiten hat Patrick dies zu tun, angenommen alle Plätze waren anfangs besetzt?

Zahlentheorie

Z1) Beweise, dass es für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ natürliche Zahlen $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ gibt, sodass

$$a_k \mid (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$$

für jedes $k = 1, 2, \ldots, n$ gilt.

Z2) Bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$, sodass für jeden Teiler $d > 1$ von n

$$d^2 + n \mid n^2 + d$$

gilt.

Viel Glück!